ثانوية علال الفاسي – سيدي سليمان . سلسلة رقم 2 من تمارين موجهة

الثانية باك مسلك علوم رياضية - أ - السنة الدراسية : 2008/2007

التمرين1 : نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n+3} \quad \text{و} \quad v_n = n^2+1 \quad \text{و} \quad w_n = -\sqrt{n}$$

بين باستعمال تعريف النهاية أن :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty .$$

التمرين2: حدد نهاية كل من المتتاليات التالية :

$u_n = 2^n$ ؛ $v_n = 1+\frac{1}{2^n}$ ؛ $w_n = \frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ؛ $p_n = 7+\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ ؛

$q_n = 2-5^n$.

التمرين3: حدد نهاية كل من المتتاليات التالية :

$u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$ ؛ $v_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$ ؛ $w_n = \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^4}$ ؛ $p_n = \sqrt{3n^2-n+2}-3n$ ؛

$q_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

التمرين4: حدد نهاية كل من المتتاليات التالية :

$u_n = \frac{\cos n}{n+1}$ ؛ $v_n = n+\sin 2n$ ؛ $w_n = \frac{4n+(-1)^n}{3n-2(-1)^{n+1}}$ ؛ $q_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a>b>0)$

التمرين5: نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{4^n}{n^2}$

أ- تحقق من أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية .

ب- استنتج أن $\left(\frac{4^n}{n}\right)_{n\geq1}$ تؤول إلى $+\infty$.

ج- حدد نهاية المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{4^n+n}{4^n+2n}$

التمرين6: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}; \ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1- بين أن : $0 \leq u_n \leq 3$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية .

3- حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين7: لتكن (u_n) متتالية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^{\ 2}+12} \ ; \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1- لكل n من $\mathbb{N}$ نضع $v_n = u_n{}^2 - 4$.
بين أن المتتالية (v_n) هندسية .
2- استنتج $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين8: لتكن (u_n) متتالية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \; ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; 0 \le u_n \le 2$
2- بين أن (u_n) تزايدية .
3- استنتج أن (u_n) متقاربة .
4- أ- بين أن : $|u_{n+1} - 2| \le \frac{1}{2}|u_n - 2| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$
ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; |u_n - 2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$
ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

التمرين9: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \le \frac{3}{2}$
استنتج أن (u_n) متقاربة .
2- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$
ب- استنتج بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < u_n - \sqrt{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$
ج- استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين10: لتكن $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متتاليتين معرفتين بما يلي :
$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$

1- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ متحاديتان .
2- لتكن e النهاية المشتركة للمتتاليتين . بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n \le e \le v_n$
3- نفترض أن $e \in \mathbb{Q}$ إذن يوجد p و q من $\mathbb{N}^*$ بحيث $e = \frac{p}{q}$.
أ- بين أن : $u_q < \frac{p}{q} < v_q$

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي θ بحيث $0<\theta<1$ و $\frac{p}{q}=u_q+\frac{\theta}{qq!}$ ثم استنتج أن $e\notin\mathbb{Q}$

التمرين 11 : لتكن (u_n) متتالية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1\,;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) متتالية معرفة لكل n من $\mathbb{N}$ بما يلي : $v_n=u_n-\frac{3}{2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية .

ب- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين 12 : لتكن (u_n) متتالية معرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}\ ;\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) أ- بين أن (u_n) مكبورة بالعدد 4 .

ب- بين أن (u_n) تزايدية .

ج- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

2) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $4-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(4-u_n)$

ب- أوجد نتيجة السؤال 1) ج-

ج- ادرس تقارب المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $v_n=n^2(4-u_n)$

التمرين 13 : احسب بدلالة n المجموعين : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$ و $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

التمرين 14 : بين أن : $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\geq1+\sqrt{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

التمرين 15 : ادرس المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول u_0 $(u_0\in\mathbb{R})$ و بالعلاقة الترجعية :

$u_{n+1}=\sqrt{2+\frac{1}{2}{u_n}^2}$ لكل لكل n من $\mathbb{N}$.

التمرين 16 : احسب نهاية كل متتالية من المتتاليات المعرفة بحدودها العامة :

$u_n=\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ ؛ $v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ ؛ $w_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{(-1)^n}{3^n}$ ؛

$p_n=\frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$ ؛ $q_n=\frac{E(x)+E(2x)+\cdots+E(nx)}{n^2}$ $(x\in\mathbb{R})$

التمرين 17 : ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $0 < a < b$.

نضع $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

بين أن المتتاليتين (u_n)و (v_n) متحاديتان .